



UNIVERZITET U NIŠU
FAKULTET ZAŠTITE NA RADU U NIŠU



OSNOVI MAŠINSTVA

- PREZENTACIJA BR. 10 -

Dr Darko Mihajlov, vanr. prof.

SADRŽAJ PREZENTACIJE

- ♦ Zadatak Otpornosti materijala;
- ♦ Osnovne pretpostavke u Otpornosti materijala;
- ♦ Deformacija čvrstog tela – pojam i vrste;
- ♦ Određivanje unutrašnjih sila u čvrstom telu;
- ♦ Naponi u poprečnom preseku čvrstog tela;
- ♦ Mala deformacija čvrstog tela.



OSNOVI MAŠINSTVA

Oblast izučavanja Otpornosti materijala

Otpornost materijala - posebna tehnička disciplina i predstavlja deo *Mehanike čvrstog tela*.



*Galileo Galilei (1564-1642),
utemeljitelj moderne
mehanike i fizike*

OSNOVI MAŠINSTVA

Otpornost materijala izučava naponsko-deformaciona stanja, odnosno naprezanja i deformacije čvrstog (*deformabilnog*) tela pri različitim dejstvima (opterećenjima) uvođenjem izvesnih pretpostavki i pojednostavljenih matematičkih izraza koji su pogodni za inženjersku praksu.

Zadatak Otpornosti materijala

Osnovni zadatak Otpornosti materijala predstavlja **dimenzionisanje** elemenata konstrukcija, uzimajući pritom u obzir vrstu materijala, kao i oblik i stepen spoljašnjeg opterećenja samih elemenata.



*Stephen Timoshenko
(1878 -1972),
otac modernog
mašinskog inženjerstva i
Nauke o čvrstoći materijala*

OSNOVI MAŠINSTVA

Osnovni zadatak Otpornosti materijala predstavlja **dimenzionisanje** elemenata konstrukcija, uzimajući pritom u obzir vrstu materijala, kao i oblik i stepen spoljašnjeg opterećenja samih elemenata.

Dimenzionisanje podrazumeva određivanje dimenzija sastavnih elemenata konstrukcije po kriterijumu *maksimalne uštede materijala*, pri čemu mora da se obezbedi *bezbednost* konstrukcije.

Dimenzionisanje se vrši tako što se na osnovu spoljašnjih opterećenja određuju najveće vrednosti sila u preseku elementa, a zatim se na osnovu njih nalaze izrazi za najveće napone u zavisnosti od relevantnih dimenzija.

Dimenzije elementa se određuju korišćenjem uslova da *maksimalna vrednost stvarnog (radnog) napona ne sme da pređe dozvoljenu vrednost napona u zavisnosti od vrste materijala*. Na ovaj način je moguće odrediti najviše jednu dimenziju tela.

Zadatak Otpornosti materijala

DIMENZIONISANJE ELEMENTA OBUHVATA:

1. proračun čvrstoće,
2. proračun krutosti i
3. proračun stabilnosti.

OSNOVI MAŠINSTVA

Dimenzionisanje elementa konstrukcije obuhvata:

1. proračun čvrstoće,
2. proračun krutosti i
3. proračun stabilnosti.

Proračun čvrstoće podrazumeva određivanje dimenzija elementa zavisno od odabranog materijala, koje isključuju mogućnost loma, odnosno garantuju bezbednost konstrukcije.

Proračun krutosti (deformabilnosti) podrazumeva određivanje dimenzija elemenata zavisno od odabranog materijala, koje obezbeđuju deformacije u dozvoljenim granicama, kao i određivanje deformacija dimenzionisanog elementa pod spoljašnjim opterećenjem.

Proračun stabilnosti podrazumeva proveru sposobnosti elementa da pod spoljašnjim opterećenjem sačuva svoj prvobitni oblik i ne izgubi stabilnu ravnotežu.

Pretpostavke u Otpornosti materijala

U Otpornosti materijala se izučava čvrsto telo koje je tako idealizovano da ima sledeća svojstva:

1. Materijal je elastičan;
2. Između naprezanja i deformacija postoji linearna zavisnost;
3. Telo se posmatra kao neprekidna sredina;
4. Telo je homogeno i izotropno;
5. Deformacije tela su male u odnosu na konačne dimenzije tela;
6. Pretpostavka ravnih poprečnih preseka.

OSNOVI MAŠINSTVA

U Otpornosti materijala se izučava čvrsto telo koje je tako idealizovano da ima sledeća svojstva:

1. **Materijal je elastičan** – Elastičnost je svojstvo materijala da se vraća u prvobitno stanje nakon uklanjanja, odnosno prestanka dejstva spoljašnjih opterećenja. Telo (element sistema – mašine) se ponaša elastično samo do jedne određene granice koja se naziva **granica elastičnosti**.
2. **Između naprezanja i deformacija postoji linearna zavisnost** do određene granice koja se naziva **granica proporcionalnosti**.
3. **Telo se posmatra kao neprekidna sredina**, odnosno kontinuum;
4. **Telo je homogeno i izotropno**, što podrazumeva da ima ista mehanička svojstva u svim tačkama i za sve pravce kroz te tačke.
5. **Deformacije tela su male u odnosu na konačne dimenzije tela**, što omogućuje primenu principa superpozicije, po kome redosled dejstava sila nije bitan, pa njihovi uticaji mogu da se razmatraju pojedinačno, a zatim da se superponiraju. Jednačine ravnoteže se postavljaju na nedeformisanom telu.
6. **Pretpostavka ravnih poprečnih preseka** – ravni poprečni preseki koji su pri deformaciji nosača normalni na osu nosača, ostaju ravni i normalni i u odnosu na deformisanu osu nosača (*Bernulijeva hipoteza*).

Deformacija tela – pojam i vrste

Deformacija - promena oblika i dimenzije tela pod dejstvom spoljašnjih sila.

Veličina deformacije zavisi od:

1. Intenziteta (jačine) spoljašnje sile,
2. Položaja napadne tačke spoljašnje sile,
3. Dimenzija (oblika) tela,
4. Vrste materijala od kojeg je telo napravljeno.



OSNOVI MAŠINSTVA

Deformaciju predstavlja promena oblika i dimenzije tela, izazvana dejstvom spoljašnjih sila.

Veličina deformacije zavisi od:

1. Intenziteta (jačine) spoljašnje sile,
2. Položaja napadne tačke spoljašnje sile,
3. Dimenzija (oblika) tela,
4. Vrste materijala od kojeg je telo napravljeno.

Deformacije tela mogu biti **elastične** i **plastične**.

Elastične deformacije su *privremene* i one nestaju po uklanjanju spoljašnjih sila, tj. telo se vraća u prvobitni oblik i na prvobitne dimenzije po prestanku dejstva spoljašnjih sila.

Plastične deformacije su *trajne*, tj. telo zadržava novi deformisani oblik i dimenzije po prestanku dejstva spoljašnjih sila.

Deformacija tela – pojam i vrste



OSNOVI MAŠINSTVA

Razaranje tela nastaje kada deformacije pređu *granicu kidanja (gnječenja) materijala*, tj. kada među-molekularne sile popuste pod dejstvom spoljašnjih sila, pri čemu nastaju prsline, pukotine ili lomovi.

Određivanje unutrašnjih sila u čvrstom telu

Metoda preseka – način za određivanje unutrašnjih sila u telu.

Metodom preseka se na mestu preseka određuju:

1. **Rezultanta unutrašnjih sila** i
2. **Rezultujući moment unutrašnjih sila.**

OSNOVI MAŠINSTVA

Za analizu naprezanja, odnosno određivanje unutrašnjih sila koje se javljaju kao posledica različitih spoljašnjih opterećenja tela, najčešće se primjenjuje **Metoda preseka**.

Metodom preseka se na mestu preseka određuju **rezultanta unutrašnjih sila** i **rezultujući moment unutrašnjih sila** pomoću:

- Uslova ravnoteže,
- Raspodele naprezanja po preseku (pomoću pretpostavke o deformisanju);
- Veze između naprezanja i deformacija.

U okviru Metode preseka se za analizu naprezanja tela usled dejstva spoljašnjih sila često koriste **Sen-Venanov princip** i **Princip superpozicije uticaja**.

Sen-Venanov princip

Po Sen-Venanovom principu se dejstvo površinskih sila koje su raspoređene po relativno maloj površini može zameniti statički ekvivalentnim opterećenjem koje se redukuje na glavni vektor i glavni moment za težište površine kao redukcionu tačku.

Prema Sen-Venanovom principu, raspored spoljašnjih sila je bitan samo u neposrednoj, veoma maloj okolini njihovog dejstva, te se kao takav može zanemariti.

Sen-Venanov princip se može primeniti u slučaju kada je oblast dejstva opterećenja mala u odnosu na dimenzije tela.

Princip superpozicije uticaja

Princip superpozicije uticaja (*princip nezavisnosti dejstva sila*) dozvoljava da se pojedinačno dejstvo sila posmatra bilo kojim redosledom i zatim izvrši sabiranje dobijenih rezultata.

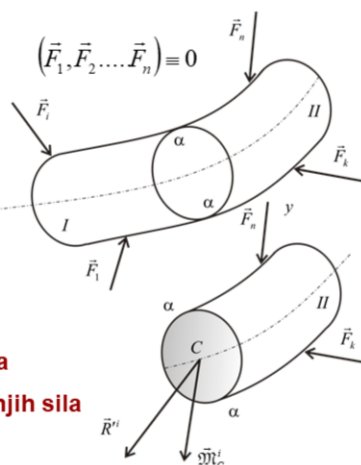
Određivanje unutrašnjih sila u čvrstom telu

Na čvrsto (deformabilno) telo dejstvuje **uravnotežen** sistem spoljašnjih sila.

1. Telo se preseče nekom ravni $\alpha-\alpha$.
2. Uticaj uklonjenog dela I tela na deo II se zameni unutrašnjim silama koje se redukuju na težište C površine preseka $\alpha-\alpha$, pri čemu se dobija:

$\vec{R}^i$ - redukciona rezultanta unutrašnjih sila

$\vec{M}_C^i$ - rezultujući redukcioni spreg unutrašnjih sila



*Redukcija unutrašnjih sila
na težište preseka*

OSNOVI MAŠINSTVA

Određivanje unutrašnjih sila u čvrstom telu Metodom preseka se vrši kada na čvrsto (deformabilno) telo dejstvuje **uravnotežen sistem spoljašnjih sila**.

Telo je štap proizvoljnog preseka sa zakrivljenom osom.

Postupak određivanja unutrašnjih sila u čvrstom telu Metodom preseka se sprovodi kroz sledeće korake:

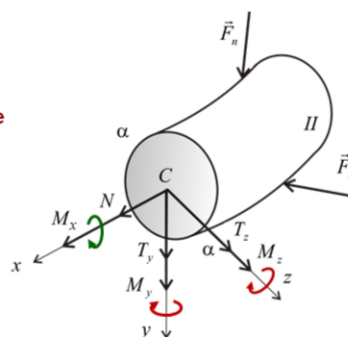
1. Telo se preseče nekom ravni $\alpha-\alpha$;
2. Uticaj uklonjenog dela I tela na deo II se zameni unutrašnjim silama koje se redukuju na težište C površine preseka $\alpha-\alpha$, pri čemu se dobija:
 - redukciona rezultanta unutrašnjih sila R^i koja je jednaka glavnom vektoru unutrašnjih sila i
 - rezultujući redukcioni spreg unutrašnjih sila M_C^i čiji je moment jednak glavnom momentu unutrašnjih sila.

nastavak

Određivanje unutrašnjih sila u čvrstom telu

$$\vec{R}^{(i)} = \vec{N} + \vec{T} = \vec{N} + \underbrace{\vec{T}_y + \vec{T}_z}_{\vec{T}} = \underbrace{N}_{\text{Normalna sila}} \vec{i} + \underbrace{T_y \vec{j} + T_z \vec{k}}_{\text{Komponente tranverzalne sile}}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z = \underbrace{M_x}_{\text{Moment uvijanja}} \vec{i} + \underbrace{M_y \vec{j} + M_z \vec{k}}_{\text{Komponente momenta savijanja}}$$



Komponente unutrašnjih sila u preseku

$$(1) \sum X = 0 \quad ; \quad (2) \sum Y = 0 \quad ; \quad (3) \sum Z = 0 \quad ;$$

$$(4) \sum M_x = 0 \quad ; \quad (5) \sum M_y = 0 \quad ; \quad (6) \sum M_z = 0 .$$

OSNOVI MAŠINSTVA

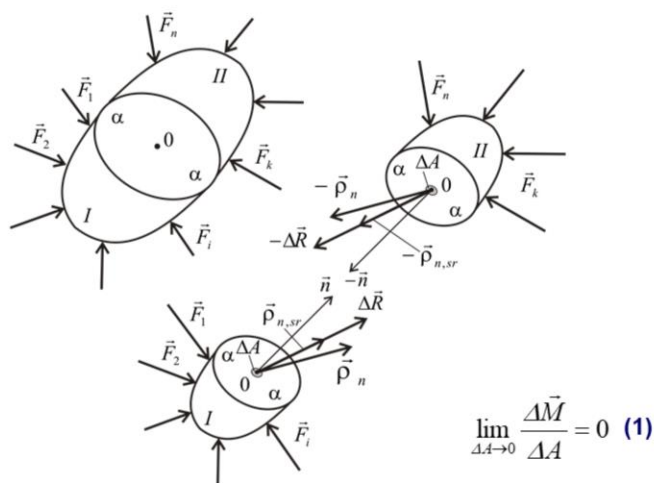
3. Glavni vektor i glavni moment unutrašnjih sila mogu da se razlože na komponente u odnosu na Dekartov koordinatni sistem u prostoru $Oxyz$.

Prvi izraz predstavlja razlaganje glavnog vektora unutrašnjih sila, a drugi izraz razlaganje glavnog momenta unutrašnjih sila.

4. Komponente unutrašnjih sila koje dejstvuju na odsečeni deo tela (II) moraju da budu u ravnoteži sa spoljašnjim silama koje dejstvuju na isti deo tela.

Prema tome, jednačine ravnoteže za unutrašnje i spoljašnje sile koje dejstvuju na posmatrani deo tela (II), a raspoređene su proizvoljno u prostoru, mogu se napisati u datom obliku, uzimajući u obzir sve sile (spoljašnje i unutrašnje) za odsečeni deo tela.

Naponi u poprečnom preseku



Srednji ukupan napon i ukupan napon

OSNOVI MAŠINSTVA

Naponi u poprečnom preseku

U preseku α - α , u okolini tačke 0, uoči se elementarna površina ΔA .

Unutrašnje sile koje djeluju na elementarnu površinu ΔA redukuju se na tačku 0 tako da je redukciona rezultanta jednaka rezultanti unutrašnjih sila ΔR , jer je vrednost momenta redukcionog sprega unutrašnjih sila jednaka nuli zbog beskonačno male elementarne površine ΔA – izraz (1).

Količnik rezultante unutrašnjih sila koje djeluju na elementarnu površinu ΔR i elementarne površine ΔA predstavlja **srednji (prosečni) ukupan napon** $p_{n,sr}$ u tački 0 za ravan sa normalom $\vec{n}$. Pravac i smer srednjeg ukupnog napona se poklapa sa smerom i pravcem rezultante unutrašnjih sila.

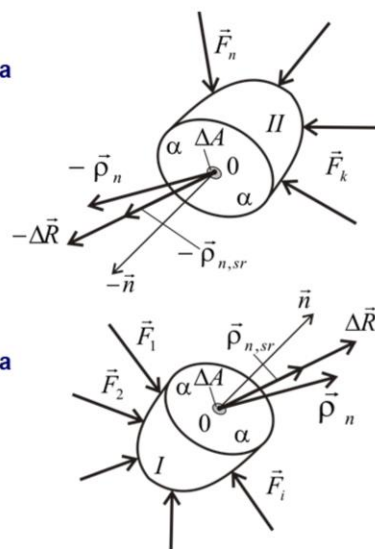
Naponi u poprečnom preseku

**Srednji ukupan napon u tački 0 za
deo tela (II) sa normalom $-\vec{n}$:**

$$\vec{\rho}_{-n, sr} = -\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} = -\vec{\rho}_{n, sr}$$

**Srednji ukupan napon u tački 0 za
deo tela (I) sa normalom $\vec{n}$:**

$$\vec{\rho}_{n, sr} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A}$$



Srednji ukupan napon i ukupan napon

OSNOVI MAŠINSTVA

Srednji ukupni naponi u tački 0 sa normalom n za delove tela I i II su dati navedenim izrazima.

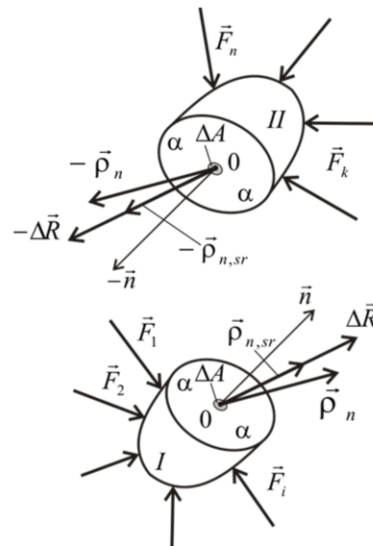
Naponi u poprečnom preseku

Ukupan napon u tački 0 za deo tela (II) sa normalom $-\vec{n}$:

$$\vec{\rho}_{-n} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} \right) = -\frac{d\vec{R}}{dA} = -\vec{\rho}_n$$

Ukupan napon u tački 0 za deo tela (I) sa normalom $\vec{n}$:

$$\vec{\rho}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \vec{\rho}_{n,sr} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} = \frac{d\vec{R}}{dA}$$



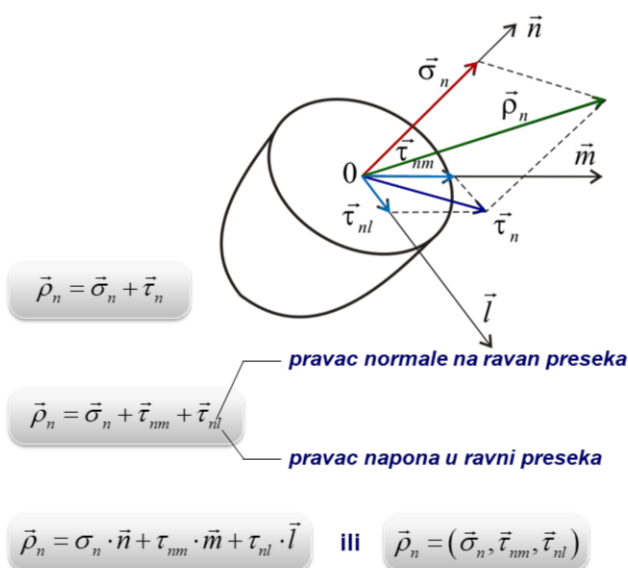
Srednji ukupan napon i ukupan napon

OSNOVI MAŠINSTVA

Granična vrednost srednjeg ukupnog napona $\rho_{n,sr}$ kada elementarna površina ΔA teži nuli zove se **totalan (ukupan) napon** ρ_n u tački 0 za ravan sa normalom n .

Ukupan napon je vektor čiji se pravac ne poklapa ni sa pravcem rezultante unutrašnjih sila, ni sa pravcem normale n na ravan preseka α - α .

Naponi u poprečnom preseku



OSNOVI MAŠINSTVA

Ukupan napon ρ_n u tački 0 preseka $\alpha\text{-}\alpha$ sa normalom n se može razložiti na komponentne napone - jedan u pravcu normale na presek, koji se zove **normalni napon** σ_n , i jedan tangencijalni (smičući) napon τ_n u ravni preseka $\alpha\text{-}\alpha$.

Tangencijalni (smičući) napon τ_n može da se razloži na dva tangencijalna (smičuća) napona τ_{nm} i τ_{nl} u istoj ravni preseka $\alpha\text{-}\alpha$.

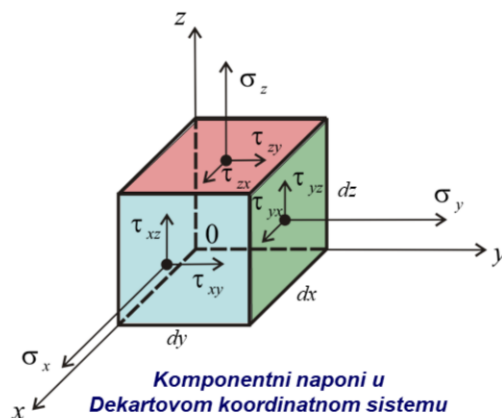
Za uvedene jedinične vektore n , m i l , izraz za ukupan napon se može napisati u prikazanom obliku.

Dakle, **napon je vezan za određenu tačku i ravan kojoj pripada ta tačka.**

Broj ravni preseka koje sadrže tu tačku (0) je *neograničen*. Prema tome, za tu tačku će postojati *beskonačan broj ukupnih napona* ρ_n .

Skup svih ukupnih napona u toj tački (0) se naziva **stanje napona**.

Naponi u poprečnom preseku



Komponentni naponi u Dekartovom koordinatnom sistemu

$$\vec{\rho}_x = \vec{\sigma}_x + \vec{\tau}_{xy} + \vec{\tau}_{xz} = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k};$$

$$\vec{\rho}_y = \vec{\sigma}_y + \vec{\tau}_{yx} + \vec{\tau}_{yz} = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k};$$

$$\vec{\rho}_z = \vec{\sigma}_z + \vec{\tau}_{zx} + \vec{\tau}_{zy} = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k};$$

$$\mathbb{S} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

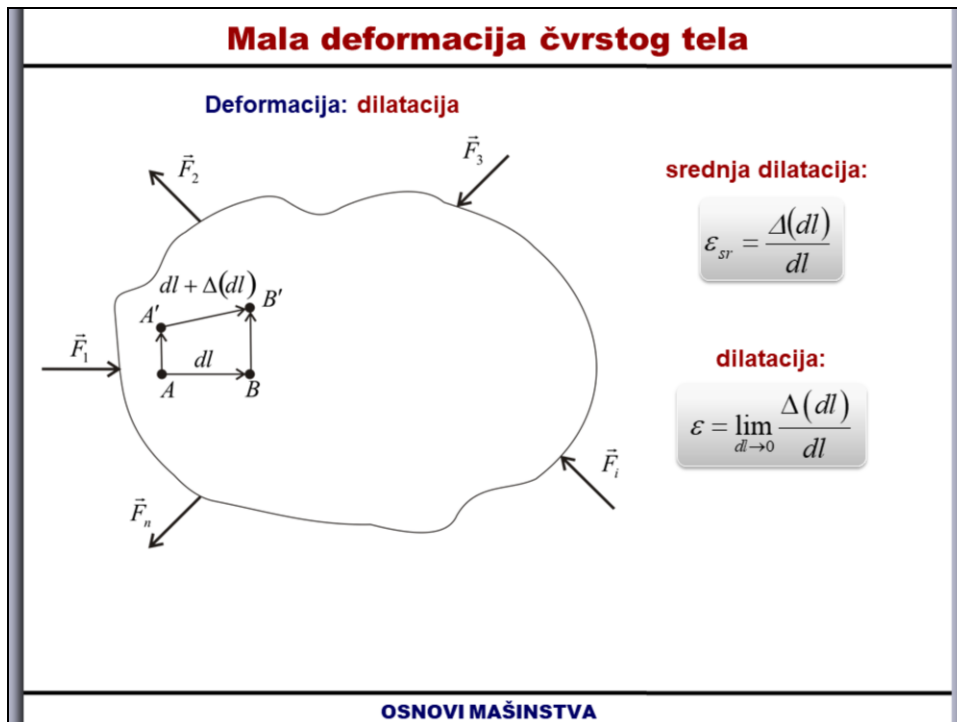
OSNOVI MAŠINSTVA

Za tačku 0 postoji *beskonačan broj ukupnih napona* ρ_n . Međutim, ovaj problem može da se uprosti, jer te vrednosti podležu vezama, tj. nisu potpuno nezavisne.

Dovoljno je da se za usvojeni Dekartov koordinatni sistem u prostoru, u okolini tačke 0 u odnosu na elementarnu zapreminu dV , posmatraju ukupni naponi čije su normale zapravo ose koordinatnog sistema. To su **tri vektora napona**: ρ_x , ρ_y i ρ_z , sa po tri komponentna napona, koji se mogu napisati u obliku **matrice tenzora napona** $\mathbb{S}$.

Vektori napona određuju u potpunosti naponsko stanje u tački 0.

Dakle, stanje napona u tački 0 je određeno sa devet komponentnih napona, tri normalna i šest tangencijalnih, koji se predstavljaju u obliku kvadratne šeme koja se zove **matrica tenzora napona** ili **tenzor napona** $\mathbb{S}$.



Pod malom deformacijom čvrstog tela se podrazumevaju male promene oblika i zapremine tela pod dejstvom spoljašnjih sila.

Relativni položaji čestica tela se pri maloj deformaciji tela menjaju, a samim tim i položaji posmatranih čestica tela.

Ako se uoče dve tačke čvrstog tela na malom, beskonačno bliskom rastojanju $AB=dl$ pre dejstva spoljašnjih sila, po opterećenju se ovo rastojanje menja, jer tačke A i B prelaze u nove položaje A' i B' bliske prethodnim: $A'B'=dl+\Delta(dl)$, pri čemu se rastojanje dl menja za dužinu $\Delta(dl)$ koja se zove **apsolutna (ukupna) promena dužine**.

Apsolutna (ukupna) promena dužine $\Delta(dl)$ nastaje kao posledica pojave normalnog napona u čvrstom telu.

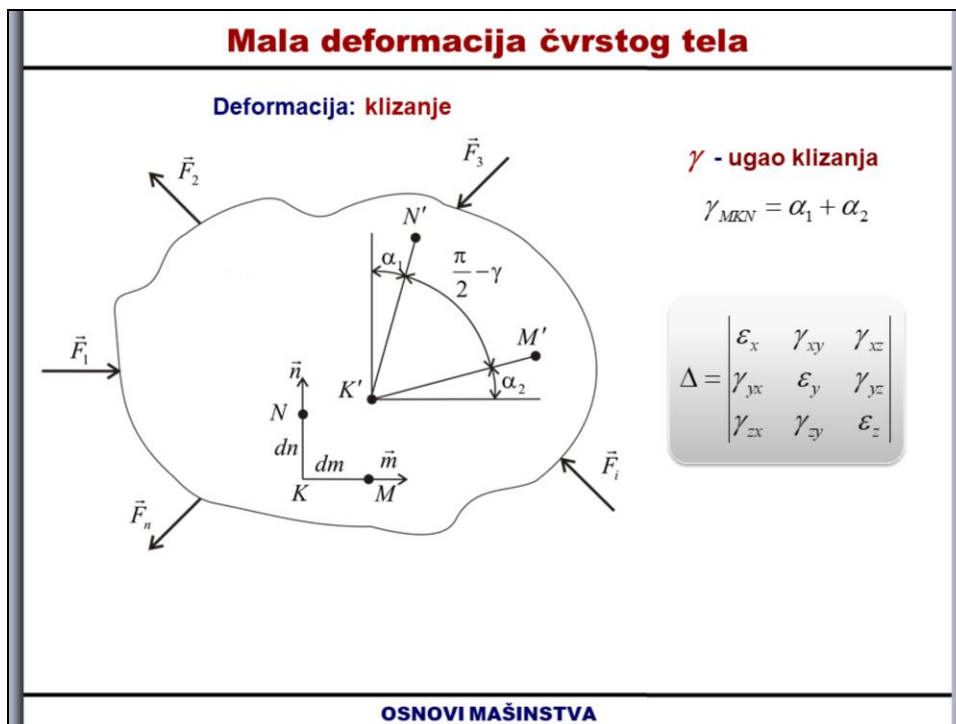
Odnos apsolutne (ukupne) promene dužine i prethodne dužine predstavlja **srednju dilataciju** ε_{sr} (**srednju relativnu promenu dužine** u okolini tačke A i pravcu AB).

Granična vrednost ove srednje vrednosti kada dl teži nuli zove se **dilatacija (specifična promena dužine** u tački A za pravac AB) i obeležava sa ε .

U opštem slučaju, dilatacija bi za neku drugu duž kroz tačku A imala neku drugu vrednost, tj. dilatacija je veličina koja se odnosi na tačku i pravac kroz tu tačku. Ona može da bude **pozitivna** i tada predstavlja **relativno izduženje**, ili **negativna**, kada predstavlja **relativno skraćenje**.

Dilatacija je neimenovani broj.

Duž AB pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja ne menja samo dužinu, već i pravac, tako da je za potpuno poznavanje deformacije u okolini posmatrane tačke potrebno da se odredi promena ugla između pravaca.



Ako se posmatra prav ugao sa temenom u tački K čvrstog tela pre deformacije, čiji kraci prolaze kroz tačke M i N , taj ugao se posle deformacije promenio za ugao γ koji se zove **ugao klizanja**.

Granična vrednost promene pravog ugla, kada duži KM i KC teže nuli, predstavlja klizanje $\gamma_{MKN} = \alpha_1 + \alpha_2$ u tački K za ravan MKN .

Klizanje je mera promene oblika tela kao posledica dejstva tangencijalnog napona i zove se **deformacija smicanja**.

Klizanje može da bude *pozitivno* ako prav ugao postaje *oštar* i obrnuto, *negativno* ako prav ugao postaje *tup*.

Analogno određivanju stanja napona, može da se govori o određivanju **stanja deformacije**. Kroz bilo koju tačku čvrstog tela može da se postavi bezbroj duži i ravni, i da se za svaku od njih odrede dilatacija i klizanje. Skup tih vrednosti određuje stanje deformacije u datoj tački.

Stanje deformacije u posmatranoj tački je u potpunosti određeno sa devet veličina i to **tri dilatacije** i **šest klizanja**, koje takođe mogu da se predstave u obliku kvadratne matrice u odnosu na Dekartov koordinatni sistem i za elementarnu zapreminu u okolini posmatrane tačke.

Kvadratna matrica u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, za elementarnu zapreminu u okolini posmatrane tačke, zove se **matrica tenzora deformacije** ili **tenzor deformacije**. Obeležava se sa Δ .

Kontrolna pitanja 10



1. Šta je zadatak Otpornosti materijala?
2. Koje su osnovne pretpostavke u Otpornosti materijala?
3. Šta se podrazumeva pod deformacijom čvrtstog tela i koje su vrste deformacija?
4. Definirati sile koje djeluju na čvrsto telo;
5. Objasniti način određivanja unutrašnjih sila u čvrstom telu;
6. Definirati napone u poprečnom preseku čvrstog tela;
7. Objasniti male deformacije čvrstog tela pod dejstvom spoljašnjih sila.